# E. Cartan in the Bonnet Problem (Geometry of Submanifolds : Elie Cartan and the 21st Century)



剱持, 勝衛

数理解析研究所講究録 1206 巻 2001 年 45-54



# É. Cartan in the Bonnet Problem

東北大学理学研究科　劔持　勝衛 (Katsuei Kenmotsu)
Mathematical Institute,　Tohoku Univ.

É. Cartan は 1869 年生まれで 1951 年他界している．これから紹介する彼の論文 [4] は 1942 年の出版で Cartan 73 才の時の作品である．本稿の目的は古典的曲面論における Bonnet 問題について，Cartan の成したことを説明し，その後で Cartan が出来なかった部分に関する現代の解答を解説することである．

３次元ユークリッド空間 $R^3$ 内の滑らかな二つの曲面片 $M_1, M_2 \subset R^3$ が Bonnet 対を成すとは，$M_1 = M_2$（等長的）且つ $M_1$ と $M_2$ の主曲率が曲面の対応する各点で等しいという二つの条件を満たすことである．主曲率は高々２こであるから，上の条件は $M_1 = M_2$ (等長的）且つ $H_1 = H_2$ （同じ平均曲率）という２条件と同値である．

懸垂面と螺旋面は Bonnet 対を成す．Bonnet 問題とは，全ての Bonnet 対を見つけ，分類することである．1867 年に O. Bonnet [3] が最初にこの問題を調べ，それからいくらかの進展 [8] があったが，大きな成果はこれから述べる Cartan [4] による．Cartan のやり残した問題は最近 A. Bobenko -U. Eitner [2] により解決された．

しかし，Bonnet 問題そのものは，まだ完全な解決にはいたってない．実際，A. Bobenko -U. Eitner [2] はへそ点がない場合でかつ Bonnet 対が 1-径数族として表れる場合を研究した．へそ点がある場合の Bonnet 対の研究は最近の Kamberov, Pedit と Pinkall [11] で大きく進展している．

本稿ではこの Bonnet 問題を例に取り、古典的曲面論がどのように発展してきたかを解説したい．先ず、O. Bonnet [3] から説明を始めよう．$M$ を連結な２次元多様体とし，$M$ から $R^3$ への実解析的なはめ込み $X(u,v) : M \longrightarrow R^3$ を考える．$X(u,v)$ の単位法線ベクトル場を $n(u,v)$ とする．その時，曲面

$X(u,v)$ の第一、第二基本形式は

$$\begin{aligned} I_X &= dX\cdot dX = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \\ II_X &= -dX\cdot dn = Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2 \end{aligned}$$

で与えられる、ここで "・" は $R^3$ の内積を表す. $I_X$ と $II_X$ は独立でない. 実際、$K$ を $I_X$ のガウス曲率とするとき、ガウスの方程式：

$$K=-\frac{LN-M^2}{EG-F^2}$$

と $L, M, N$ に関する1階の偏微分方程式系であるコダッチの方程式：

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v}-\frac{\partial M}{\partial u} &= \phi(E,F,G\,;L,M,N) \\ \frac{\partial N}{\partial u}-\frac{\partial M}{\partial v} &= \psi(E,F,G\,;L,M,N) \end{aligned}$$

を満たさなくてはならぬ、（ここで、上式の右辺は第一、第二基本形式の係数から定まる関数である.）曲面論の基本定理は、これの逆が成立することを主張する. 詳しく述べると、単連結な2次元リーマン多様体 $(M,ds^2)$ と $M$ 上の対称な2次形式 $II$ に対してリーマン計量 $ds^2$ と2次形式 $II$ の係数がガウス方程式とコダッチ方程式を満たすと仮定する. そのとき、$(M,ds^2)$ から $R^3$ への等長的はめ込み $X:M\to R^3$ が存在して、$I_X=ds^2, II_X=II$ が成立する. このようなはめ込みは $R^3$ の運動を除いて一意的である.

Bonnet は曲面によってはリーマン計量と $II$ のトレースだけで曲面が定まることを知っていた. それで、等長的でかつ平均曲率が等しいような曲面の対を研究した. Bonnet の結果を述べるために、与えられた曲面 $M\subset R^3$ に対し、記号

$$B(M)=\left\{\tilde{M}\subset R^3:\tilde{M}=M(\text{等長的}),\quad \tilde{H}=H(\text{等しい平均曲率})\right\}/\sim,$$

（$\sim$ は $R^3$ の運動による同値関係）を用意する.

**定理 1 (Bonnet, 1867 [3])** *1.* $B(M)$ が丁度2つの曲面からなるような $M$ が複数個存在する.

*2.* 1-径数族となるような $B(M)$ は 3 この異なる曲面族に別けられる：

(a)　平均曲率一定な曲面の集合、

(b)　平均曲率一定でない曲面で、ある関数で定義される曲面族、

(c)　平均曲率一定でない曲面で、ある定数で定義される曲面族.

**注意 1**　2(*c*) の族に含まれる曲面は isothermic, かつ Weingarten 曲面である [7].

定理 1 を証明するために Bonnet は曲面はへそ点を持たないと仮定し、パラメーター $u, v$ を複素変数に拡張して偏微分法を使った．複素数を変数とする関数の研究は 1800 年代の前半に Cauchy によって始められていたから、Bonnet は当時の最新理論を幾何に応用したのである．しかし、彼の計算から得られる結果は全て複素数値関数で表され、それらが実の曲面を定義するかどうかまでは考えてない.

この Bonnet の仕事から 75 年後、É. Cartan の研究が 1942 年に現われた．Cartan は Bonnet 対を実曲面として研究し, 2(*b*) に属する曲面は実曲面としては存在しないこと、2(*c*) に属する曲面について、その第一、第二基本形式を具体的に決定した.（ただし、非へそ点の近傍である.）Cartan の証明方法は動標構理論を使用し、且つ彼の開発した微分形式論（当時の最新理論）を応用してその結果を出したのであった.

**定理 2 (É. Cartan, 1942 [4])** へそ点を持たない曲面 $M \subset R^3$ が $M$ に等長的でかつ同じ平均曲率をもつ曲面の 1-径数族 $\{M_\tau\}$ をもつと仮定する．$M$ の平均曲率 $H$ が一定でないとする．そのとき、$M$ 上にある局所座標系 $(t, *)$ が存在し、$M$ の平均曲率が $t$ のみの関数 $H = H(t)$ となり、$H(t)$ は 3 階の常微分方程式

$$\left(\frac{H''}{H'}\right)' - H' = |Q|^2 \left(2 - \frac{H^2}{H'}\right), \tag{1}$$

を満たす、ここで、$Q$ は $M$ の Hopf 微分で、そのノルムの 2 乗は次で与えられるものに限る：

*1.*　$$|Q_A|^2 = \frac{4}{\sin^2(2t)},$$

*2.*　$$|Q_B|^2 = \frac{4}{\sinh^2(2t)},$$

*3.* $|Q_C|^2 = \frac{1}{t^2}$ .

対応する $H$-変形は (1) の場合は螺旋面の $H$-変形、(2) の場合は概周期的曲面の $H$-変形、(3) の場合は柱面からの $H$-変形である.

$M$ の平均曲率関数 $H$ が 1 変数関数となり、かつ 3 階の非線形微分方程式 (1) を満たすことは、1897 年 Hazzidakis [8] により既に知られていた. 更に Hazzidakis はこの微分方程式が積分できること、つまり、2 階の微分方程式を満たすことも示した. Cartan の成したことはその微分方程式の係数として上の 3 つの場合しかおきないことを示したことである. 場合 (1), (2), (3) の各々についてどのような $H$-変形になるかについては、Cartan [4] の最後の部分で説明している. この意味でへそ点でない点の近傍での $H$-変形可能な曲面は微分方程式 (1) の研究を除いてわかっていると思われていた. ここで、Cartan [4] の最後の文章を引用しておく : Une étude des singularités des équations differentielles paraît du resté difficile.

まとめると、Cartan の仕事により $R^3$ 内の $H$-変形可能曲面の第一、第二基本形式は微分方程式 (1) の解を使って具体的に書き表わされる. よって、曲面論の基本定理を思いだすと、このような曲面は微分方程式 (1) の解で一意的に定まる. 残された問題は微分方程式 ( 1 ) 自身の研究とへそ点の近傍での $H$-変形可能曲面の研究である.

Cartan 以後 Lawson -Tribuzy (1981) [15], S. S. Chern (1985) [5], I. Roussos (1987) [16], Colares -Kenmotsu (1989) [6], K. Kenmotsu [12], [13], [14], Umehara (1990) [17] 等があるが、微分方程式 (1) の研究に関して Cartan を越えたのは Bobenko-Eitner (1998) [2] である.

Bobenko-Eitner [2] が成したことは、定理 1 にある微分方程式 (1) がその係数に応じてパンルヴェ方程式の V 型、VI 型であることを示したことにある. その証明には最近発展の著しい可積分系の理論が使われた.

1867 年に始まる Bonnet の研究から Cartan, Chern , ... と約 140 年にわたり研究されてきた $H$-変形可能曲面の理論が可積分系理論とパンルヴェ方程式にどのようにして結び付いたのか？ その秘密は Bobenko と Eitner が適当な変数変換で微分方程式 (1) がパンルヴェ方程式になることを発見したことにある. その変換は具体的に与えられているので、答えは直ちに書ける

が、重要なことは彼等がどのようにしてその変数変換を発見したかである．そのためには、可積分系理論が必要であった．

Bobenko-Eitner (1998) [2] を説明しよう：$\mathcal{R}$ をリーマン面、$z = x+iy \in \mathcal{R}$ を $\mathcal{R}$ の複素座標とし、$F : \mathcal{R} \longrightarrow R^3$ を共形的はめ込みで

$$(F_z, F_z) = (F_{\bar{z}}, F_{\bar{z}}) = 0, \quad (F_z, F_{\bar{z}}) = \frac{1}{2}e^u$$

を満たすとする、ここで

$$(v, w) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \quad (v, w \in C^3), \qquad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

とおく．$n$ を $F$ の単位法線ベクトル場とすると、

$$\left\{e^{-\frac{u}{2}}F_x, e^{-\frac{u}{2}}F_y, n\right\}$$

は $F$ に沿っての動標構でこれに関して $F$ の第一、第二基本形式は

$$\begin{aligned} I_F &= (dF, dF) = e^u dz d\bar{z} && (2) \\ II_F &= -(dF, dn) = Q dz^2 + H e^u dz d\bar{z} + \overline{Q} d\bar{z}^2, && (3) \end{aligned}$$

とかける、ここで $Q = (F_{zz}, n)$ は $F$ の Hopf 微分、$H$ は $F$ の平均曲率関数である．

これらの記号を用いると、曲面論の基本定理は、与えられた $\mathcal{R}$ 上の関数 $e^u, H$ と $\mathcal{R}$ 上の 2 次微分 $Q$ に対して、(2) と (3) を満たす 曲面 $F : \mathcal{R} \longrightarrow R^3$ が合同変換を除いて一意に定まることを主張する．しかし、Hopf 微分 $Q$ と平均曲率 $H$ は独立でない．実際、それらは

$$u_{z\bar{z}} + \frac{H^2}{2}e^u - 2|Q|^2 e^{-u} = 0 \quad \text{(ガウス方程式)}$$

$$\overline{Q}_z = \frac{1}{2}H_{\bar{z}}e^u \quad \text{(コダッチ方程式)}$$

を満たす．与えられた関数 $e^u$ と $H$ に対して、上のガウス方程式から $Q$ のノルムの 2 乗 $|Q|^2$ は一意に定まる．$Q$ の偏角の部分がコダッチ方程式から一意に定まるかどうかがボンネ問題の核心部分である．

Bobenko-Eitner [2] は $R^3$ 内の曲面の研究に四元数 $\mathbf{H}$ の利用する. $\{\mathbf{1},\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ を $\mathbf{H}$ の基底とし、その各ベクトルを

$$\mathbf{i}=\begin{pmatrix}0 & -i\\ -i & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{j}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{k}=\begin{pmatrix}-i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix},\quad \mathbf{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

によって $2\times 2$-行列と同一視する. $R^3$ を 4 元数の虚数部分と同一視し、更にそれを $SU(2)$ のリー環 $su(2)$ と見なす :

$$R^3 = Im\mathbf{H} = su(2) = span\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$$
$$X = (x_1, x_2, x_3)^t = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k} \in su(2).$$

$R^3$ の内積 ( , ) は行列のトレースを使って

$$(X,Y) = -\frac{1}{2}tr(XY) \quad (X,Y \in su(2))$$

とかける. このとき、$\Phi = \Phi(x,y) \in SU(2)$ が存在して、

$$e^{-\frac{u}{2}}F_x = \Phi^{-1}\mathbf{i}\Phi, \quad e^{-\frac{u}{2}}F_y = \Phi^{-1}\mathbf{j}\Phi, \quad n = \Phi^{-1}\mathbf{k}\Phi$$

が成立する. この式と $F$ の積分可能性 $F_{xy} = F_{yx}$ を使うと

$$\Phi_z\Phi^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}u_z & -4Qe^{-\frac{u}{2}}\\ 2He^{\frac{u}{2}} & -u_z\end{pmatrix},\quad \Phi_{\bar{z}}\Phi^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}u_{\bar{z}} & -2He^{\frac{u}{2}}\\ 4\bar{Q}e^{-\frac{u}{2}} & -u_{\bar{z}}\end{pmatrix} \tag{4}$$

となる [1].

**注意 2**　上式は $R^3$ 内の任意の曲面 $F:\mathcal{R}\to R^3$ について成立する.

以下定理 1 の 2(c) の場合の曲面を扱うため、$F_\tau:\mathcal{R}\longrightarrow R^3$ を $F(=F_0)$ の等長的 1-径数族で その平均曲率 が $F$ の平均曲率に等しいとする. このような $F_\tau$ を梅原 [17] に従い $F$ の $H$-変形と呼ぶ. $F_\tau$ の第一、第二基本形式は $H, H', z$ で具体的に書き表される. 平均曲率 $H$ が一定の場合、$F$ の $H$-変形 $\{F_\tau\}$ は $F$ の associated family と呼ばれ、その存在は昔から知られている.

以後　$H\neq \text{const}$ とする. Cartan の定理における 場合 3 を考える. これまでの結果を思いだすと、リーマン面 $\mathcal{R}$ 上にある局所座標系 $(t,*)$ が存在し、$F:\mathcal{R}\longrightarrow R^3$ の平均曲率は $t$ のみの関数となり、微分方程式

$$\left(\frac{H''}{H'}\right)' - H' = \frac{1}{t^2}\left(2-\frac{H''}{H'}\right) \tag{5}$$

を満たす．Bobenko-Eitner [2] における重要なアイデアは上式の座標系 $t$ を具体的に決め、更に他の座標 $\lambda$ も定めてこの $(t,\lambda)$ に関して上の微分方程式系 (4) を表わしたことである．それを詳しくかくと、

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(t,\lambda)\Phi^{-1}(t,\lambda) &= t\begin{pmatrix} a(t) & \phi(t) \\ \phi(t) & -a(t)\end{pmatrix} + e^{-\frac{u(t)}{2}}\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\lambda} \\ \frac{1}{\lambda-1} & 0\end{pmatrix} \\ \Phi_t(t,\lambda)\Phi^{-1}(t,\lambda) &= \lambda\begin{pmatrix} a(t) & \phi(t) \\ \phi(t) & -a(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{a(t)}{2} & -\phi(t) \\ 0 & \frac{a(t)}{2}\end{pmatrix},\end{aligned} \tag{6}$$

ここで、$a(t), \phi(t), u(t)$ は次のように定義される：

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{u'(t)}{2} = -\frac{1}{t} - \frac{H''(t)}{2H'(t)}, \\ \phi(t) &= \frac{H(t)+tH'(t)}{2}e^{\frac{u(t)}{2}}, \\ e^{-\frac{u(t)}{2}} &= t\sqrt{-\frac{H'(t)}{2}}. \end{aligned}$$

ここまでくると、パンルヴェ方程式が見えてくる．

**定理 3 (神保ー三輪 (1981) [10])** $2\times 2$-行列の方程式系 $\Phi = \Phi(t,\lambda)$ が次の微分方程式系

$$\begin{aligned} \Phi_\lambda\Phi^{-1} &= tA(t) + \frac{1}{\lambda}A_0(t) + \frac{1}{\lambda-1}A_1(t) \\ \Phi_t\Phi^{-1} &= \lambda A(t) + C(t), \end{aligned}$$

を満たし、かつ 行列 $A(t)$ は各 $t$ で異なる固有値を持つと仮定する．そのとき、上の方程式系の可積分条件である $\Phi_{t\lambda} = \Phi_{\lambda t}$ は $V$ 型のパンルヴェ方程式 ：

$$\begin{aligned} y''(t) &= \left(\frac{1}{2y(t)} + \frac{1}{y(t)-1}\right)y(t)^2 - \frac{y'(t)}{t} + \frac{(y(t)-1)^2}{t^2}\left(\alpha y(t) + \frac{\beta}{y(t)}\right) \\ &\quad + \frac{\gamma y(t)}{t} + \frac{\delta y(t)(y(t)+1)}{y(t)-1} \end{aligned}$$

を満たす、ここで $A(t), A_0(t), A_1(t), C(t)$ の各成分は上のパンルヴェ方程式の解 $y(t)$ から具体的に書き下せ、かつ定数 $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ は $A(t), A_0(t), A_1(t)$ の固有値から定まる．

これを使うと、次が示される.

**定理 4 (Bobenko-Eitner, 1998 [2])** 定理2の場合(3)の$H$-変形の第一、第二基本形式をパンルヴェ方程式の解から具体的に定めることができる. 他の場合(1),(2)はVI型のパンルヴェ方程式から定まる.

**結論にかえて.** これまで紹介したCartanの論文[4], Bobenko-Eitnerの論文[2]から何を学ぶべきか? Cartanは動標構を採用し、その双対である微分形式を徹底的に利用した. Bobenko-Eitnerは4元数を使い、問題を4元数代数の言葉で言い直し、開発されたばかりの可積分系理論を応用した. これは$R^3$内の曲面論は古くから研究されているが、新しいかつ重要な結果はその時代の最新理論を駆使して得られることを示している.

教訓:古い題材である曲面論で先人を越える仕事をするためには、その時代の最新理論を使うこと.

N. Hitchin [9]も指摘しているように古典的曲面論は現代微分幾何学においても主要な研究話題の一つであり、今もなお成されてないことが多い. Hitchin [9]から次を引用して、本稿を終わりにする: posed by H. B. Lawson 30 years ago: is the Clifford torus the only minimal embedded torus in $S^3$ ?

# References


[1] A. I. Bobenko, Surfaces in terms of 2 by 2 matrices: Old and new integrable cases, *Harmonic Maps and Integrable Systems* A. P. Fordy and J. C. Wood (Eds.), Vieweg, 1994.

[2] A. I. Bobenko and U. Eitner, Bonnet surfaces and Painlevé equations, J. reine angew. Math., 499(1998), 47-79.

[3] O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donée, J. Éc. Polyt., 42(1867), 1-152 , 特に 72-92.

[4] É. Cartan, Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales、 Bull. Sci. Math., 66(1942), 55-85.

[5] S. S. Chern. Deformation of surfaces preserving principal curvatures, *Differential Geometry and Complex Analysis*, H. E. Rauch Memorial Volume, Springer, 1985, 155-163.

[6] G. Colares and K. Kenmotsu, Isometric deformations of surfaces in $R^3$, Pacific Jour. Math., 136(1989), 71-80.

[7] W. C. Graustein, Applicability with Preservation of Both Curvatures, Bull. Amer. Math. Soc. , 30(1924), 19-23.

[8] J. N. Hazzidakis, Biegung mit Erhaltung der Hauptkrümmungsradien, J. Crelle, 117(1897), 42-56.

[9] N. Hitchin. Global Differential Geometry, *Mathematics Unlimited -2001 and Beyond*, B. Engquist and W. Schmid (Editors), Springer (2000), 577-591.

[10] M. Jimbo and T. Miwa, Monodromy Preserving Deformation of Linear Ordinary Differential Equations with Rational Coefficients II, Physica 2D (1981), 407-448.

[11] G. Kamberov, F. Pedit and U. Pinkall, Bonnet pairs and isothermic surfaces, Duke Math. Jour., 92(1998), 637-643.

[12] K. Kenmotsu, A geometric characterization of an isometric deformation of flat surfaces in $R^3$ preserving mean curvature, An. Acad. Brasil. Cienc, 61(1989), 71-80.

[13] K. Kenmotsu, Report on $H$-deformable surfaces, *Proceedings of Symposium on Diff. Geo. in honor of Prof. S. Buchin*, World Scientific, 1993, 114-119.

[14] K. Kenmotsu. An intrinsic characterization of H-deformable surfaces, Jour. London Math., 49(1994), 555-568.

[15] B. Lawson and L. Tribuzy, On the mean curvature function for compact surfaces, Jour. Diff. Geo., 16(1981), 179-183.

[16] I. M. Roussos, Principal curvature preserving isometries of surfaces in ordinary space, Bol. Soc. Bras. Mat., 18(1987), 485-490.

[17] M. Umehara, A characterization of compact surfaces with constant mean curvature, Proc. Amer. Math. Soc., 108(1990), 483-489.

980-8578　仙台市青葉区荒巻字青葉
東北大学大学院理学研究科数学専攻
劔持　勝衛
kenmotsu@math.tohoku.ac.jp